Saraceno 42

Lineare Algebra I: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2021

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name:	Joseph Saraceno
Matrikelnr.:	1234567

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen. Bitte heften Sie sie in diesem Fall bei der Abgabe der Klausur mit dem bereitgestellten Tacker wieder in der richtigen Reihenfolge zusammen.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.
- Wenn Sie Ihr Ergebnis auf der Webseite zur Vorlesung einsehen möchten, bevor es im Studierendenportal sichtbar ist, benötigen Sie eine PIN. Ihre PIN lautet: $\boxed{\text{K21}}$

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1
Prüfen Sie, ob die folgende Matrix invertierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Die gegebene Matrix aus $M(5\times 5, K)$ ist invertierbar, da die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren l.u. sind und sie vollen Rang $= 5$ hat.

Berechnung der Inversen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z3:3 \\ Z4:2}]{Z2:2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z2+Z4]{Z1+Z5}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{Z1:2 \\ Z2:2}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z4-Z2 \\ Z5-Z1}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z4\cdot(-1) \\ Z5\cdot(-1) \\ 2}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix}}_{\text{Inverse}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

(a.)

Aufgabe 2

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 6 & t & 10 \\ 5 & 1 & 0 & 10 & -4t & 7 \\ 3 & -3 & -3 & 6 & -6t & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} + \mathrm{IV} - \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -t & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 10 & -4t & 7 \\ 3 & -3 & -3 & 6 & -6t & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - 4\,\mathrm{II} \\ \mathrm{IV} - 6\,\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & -6 & 0 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \\ \mathrm{IV} + 3\,\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -t & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{IV} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$
\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -t & -2 \\
1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\times\left(-\frac{1}{5}\right) \\
\times(-1) \\
\\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & t & 2 \\
1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\
\mathrm{II} - \mathrm{I} \\
\mathrm{III} - \mathrm{I} \\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t & 2 \\
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$\cdots \rightsquigarrow$ Rearrange $\cdots \rightsquigarrow \cdots$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t & 2
\end{array}\right]
$$

$\Rightarrow x_2 = 0, \quad x_3 = -1/3, \quad x_5 = 2/t$

$x_1 + 2x_4 = 3$

$\therefore$ A solution exists if $t \neq 0$.

(b.)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_2 = x_3 = x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_4 = 0$$

$\therefore$ The basis of the solution space of the homogeneous system of equations is

$$(-2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^T.$$

(c.) Using the information obtained in (a.) and (b.),

$$\mathbb{L} := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \lambda \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{matrix} \right\}.$$

Aufgabe 3
Der Endomorphismus $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch Multiplikation mit der folgenden Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_F(t)$, und bestimmen Sie alle Nullstellen von χ_F.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von F.

(c) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von F einen Eigenvektor.

(d) Ist der Endomorphismus F diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

a) $\chi_F(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 6 & 5-t & -6 \\ 3 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (-t)\cdot\det\begin{pmatrix} 5-t & -6 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 6 & 5-t \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$= (-t)\cdot\big((5-t)\cdot(2-t)-(-6)\cdot 0\big) + 6\cdot 0 - (5-t)\cdot 3$

$= (5-t)\cdot\big((-t)\cdot(2-t)-3\big) = (5-t)\cdot(t^2-2t-3) = (5-t)\cdot(t-3)\cdot(t+1)$

Nullstellen von $\chi_F(t)$:

1. $\chi_F(t) = (5-t)\cdot(t^2-2t-3) = 0 \iff t=5 \vee t^2-2t-3=0$

Mit pq-Formel / quadr. Ergänzung Nullstellen $t=3$ und $t=-1$ aus $t^2-2t-3=0$ ermitteln.

oder:

2. Zerlegung $\chi_F(t) = (5-t)\cdot(t-3)\cdot(t+1)$ in Linearfaktoren erkennen und Nullstellen $t=5$, $t=3$, $t=-1$ ablesen.

b) Die EW von F sind die Nullstellen von $\chi_F(t)$, also 5, 3 und -1.

c) Ansatz: Sei λ EW von F. Finde Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_3 \\ 6v_1 + 5v_2 - 6v_3 \\ 3v_1 + 2v_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} v_3 \\ 6v_1 + 5v_2 - 6v_3 \\ 3v_1 + 2v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1 \\ 5v_2 \\ 5v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_3 = 5v_1 \,,\; 6v_1 + 5v_2 - 6v_3 = 5v_2 \,,\; 3v_1 + 2v_3 = 5v_3$$

$$\Leftrightarrow v_3 = 5v_1 \,,\; v_1 = v_3 \,,\; v_1 = v_3 \Leftrightarrow v_1 = v_3 = 0$$

Also ist $\mathrm{Eig}_F(5) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v_2 \;\middle|\; v_2 \in \mathbb{R} \right\}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein EV zu $\lambda = 5$.

$\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} v_3 \\ 6v_1 + 5v_2 - 6v_3 \\ 3v_1 + 2v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \\ 3v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_3 = 3v_1 \,,\; 6v_1 + 5v_2 - 6v_3 = 3v_2 \,,\; 3v_1 + 2v_3 = 3v_3$$

$$\Leftrightarrow v_3 = 3v_1 \,,\; 6v_1 - 6v_3 = -2v_2 \,,\; 3v_1 = v_3 \Leftrightarrow v_3 = 3v_1 \,,\; -12v_1 = -2v_2$$

$$\Leftrightarrow v_3 = 3v_1 \,,\; v_2 = 6v_1$$

Also ist $\mathrm{Eig}_F(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot v_1 \;\middle|\; v_1 \in \mathbb{R} \right\}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein EV zu $\lambda = 3$

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} v_3 \\ 6v_1+5v_2-6v_3 \\ 3v_1+2v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_3=-v_1 \text{ , } 6v_1+5v_2-6v_3=-v_2 \text{ , } 3v_1+2v_3=-v_3 \Leftrightarrow$$

$$v_3=-v_1 \text{ , } -6\cdot v_2 = 6v_1-6v_3 \text{ , } v_1=-v_3 \Leftrightarrow v_1=-v_3 \text{ , } -6v_2=-12v_3 \Leftrightarrow$$

$$v_1=-v_3 \text{ , } v_2 = 2v_3$$

Also ist $\mathrm{Eig}_F(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot v_3 \;\middle|\; v_3 \in \mathbb{R} \right\}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein EV zu $\lambda=-1$.

d) Ja, F ist diagonalisierbar, denn das charakteristische Polynom von F

$$\chi_F(t) = (5-t)\cdot(t-3)\cdot(t+1)$$

zerfällt in <u>verschiedene</u> Linearfaktoren.

Aufgabe 4
Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.
Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

(1) Seien A, B Mengen. Eine **Abbildung** $f\colon A \to B$ ist eine Vorschrift, die

- ■ jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.
- ☐ jedem $a \in A$ mindestens ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.
- ☐ jedem $b \in B$ ein Element $a \in A$ mit $f(a) = b$ zuordnet.

(2) Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X ist **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- ☐ $(x \sim y \text{ und } y \sim x) \Rightarrow x = y$
- ☐ $(x_1 \sim y_1 \text{ und } x_2 \sim y_2) \Rightarrow x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$
- ■ $(x \sim y \text{ und } y \sim z) \Rightarrow x \sim z$

(3) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a,b) &\mapsto a+b \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ [n] &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$ ■ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) &\to \mathbb{Q} \\ (a,b) &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$

(4) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **bijektiv**, wenn gilt:

- ■ Zu jedem $b \in B$ existiert genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.
- ☐ Zu jedem $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.
- ☐ Die Mengen A und B haben genau gleich viele Elemente.

(5) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

- ■ Sind g und f injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.
- ☐ Ist g injektiv und f surjektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv.
- ■ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g injektiv.

(6) Bekanntlich ist eine Gruppe $(G, *)$ **abelsch**, wenn die Verknüpfung $*$ kommutativ ist. Die folgenden Gruppen sind abelsch:

- ■ $(\mathbb{Z}, +)$
- ■ $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
- ☐ $(\mathbb{S}_3, \circ)$ (symmetrische Gruppe die dreistelligen Permutationen)

(7) Die folgenden Ringe sind Körper:

- ■ $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
- ☐ $\mathbb{R}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{R}$ mit üblicher Addition und Multiplikation von Polynomen)
- ☐ $\mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ (Ring der reellen 2×2-Matrizen)

(8) In jedem **Körper** K gilt:

- ☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Elemente in K.
- ■ Zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$.
- ☐ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\beta^2 = \alpha$.

Aufgabe 5

Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)
- ☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über $\mathbb{Z}$.
- ■ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

(2) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

- ■ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$.
- ☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$.
- ■ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ und es gibt kein $\alpha \in K$ mit $\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot \mathbf{v}_2$.

(3) Der Nullvektorraum $\{\mathbf{0}\}$ über $\mathbb{R}$

- ☐ besitzt keine Basis.
- ■ besitzt als Basis die leere Familie.
- ☐ besitzt als Basis die Familie, die nur aus dem Nullvektor $\mathbf{0}$ besteht.

(4) Sei V ein Vektorraum über K. Eine Familie von Vektoren $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ aus V bildet genau dann eine **Basis** von V, wenn gilt:

- ■ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V und $\dim(V) = 3$.
- ■ Zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ existiert genau ein Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in K^3$, sodass gilt: $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$.
- ☐ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V, und $\mathbf{v}_i \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(5) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ sind invertierbar:
Achtung: Koeffizienten in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(6) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

- ■ $\mathrm{rang}(A) = n$.
- ☐ $\det(A) = 0$.
- ■ Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ vom Rang $\mathrm{rang}(A) < n$

- ■ besitzt 0 als Eigenwert.
- ☐ besitzt keine Eigenwerte.
- ☐ besitzt höchstens $n - 1$ verschiedene Eigenwerte.

Aufgabe 6
Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V, so schreiben wir f^i für die i-fache Verkettung von f mit sich selbst, also $f^0 = \mathrm{id}$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ usw.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Geben Sie ein Beispiel für einen Endomorphismus f von $\mathbb{R}^2$ an, für den gilt: $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ und $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

(b) Beweisen Sie: Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines beliebigen Vektorraums V mit $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, so ist $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f)$ für alle natürlichen Zahlen $i \geqslant 1$.

(c) Beweisen Sie: Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines *n-dimensionalen* Vektorraums V, und ist f^i für irgendeine natürliche Zahl i die Nullabbildung, so ist f^{n+1} die Nullabbildung.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

a) Wähle $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ (die Projektion eines Punktes auf die y-Achse).

Diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-linear / ein Endomorphismus auf $\mathbb{R}^2$:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

Ferner gilt $f^2 = f \circ f = f$, denn $(f \circ f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Daraus folgt $\mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.

Weiter ist $\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Leftrightarrow\, y=0} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

womit $\mathrm{Ker}\, f$ die Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat und $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ gilt,

b) Für $i=1$ ist die Aussage trivial. Für $i\geq 2$ verwende Induktion über i:

Induktionsanfang: Für $i=2$ ist die Aussage laut Voraussetzung erfüllt.

Induktionsschritt: Sei $i\geq 2$ mit $Ker(f^i)=Ker(f)$ gegeben. Dann gilt

$$Ker(f^{i+1})=\{\vec{v}\in V \mid f^{i+1}(\vec{v})=\vec{0}\}=\{\vec{v}\in V \mid f^i(f(\vec{v}))=\vec{0}\}$$

$$=\{\vec{v}\in V \mid f(\vec{v})\in Ker(f^i)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind.annahme}}}{=} \{\vec{v}\in V \mid f(\vec{v})\in Ker(f)\}$$

$$=\{\vec{v}\in V \mid f(f(\vec{v}))=\vec{0}\}=\{\vec{v}\in V \mid f^2(\vec{v})=\vec{0}\}$$

$$=\{\vec{v}\in V \mid \vec{v}\in Ker(f^2)\}=Ker(f^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Voraussetzung}}}{=} Ker(f).$$

c) Sei $f: V \to V$ endomorph, $\dim V = n$ und $f^i: V \to V$ die Nullabbildung. Dann ist insbesondere die j-fache Verkettung $f^j: V \to V$ endomorph und $\mathrm{Ker}(f^j)$ stets ein UVR von V, für alle $j \geq 1$.

1. Fall: $n+1 > i$

Dann ist $f^{n+1}(\vec{v}) = f^{n+1-i}(f^i(\vec{v})) = f^{n+1-i}(\vec{0}) = \vec{0}$, da $f^{\overbrace{n+1-i}^{\geq 0}}: V \to V$ endomorph ($\Rightarrow f^{n+1-i}(\vec{0}) = \vec{0}$). Also ist $f^{n+1}: V \to V$ die Nullabbildung.

2. Fall: $n+1 \leq i$

Aus $f^j(\vec{v}) = \vec{0}$ folgt auch $f^{j+1}(\vec{v}) = f(f^j(\vec{v})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ ($\Leftarrow f: V \to V$ endom.) für alle $\vec{v} \in V$, $j \geq 1$ und damit auch

$$\mathrm{Ker}(f^j) = \{\vec{v} \in V \mid f^j(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq \{\vec{v} \in V \mid f^{j+1}(\vec{v}) = \vec{0}\} = \mathrm{Ker}(f^{j+1}).$$

Da $\mathrm{Ker}(f^j)$ und $\mathrm{Ker}(f^{j+1})$ beides VR (UVR von V) sind, gilt

(1) $\mathrm{Ker}(f^j)$ ist UVR von $\mathrm{Ker}(f^{j+1})$ bzw.

$$\dim \mathrm{Ker}(f^j) \leq \dim \mathrm{Ker}(f^{j+1}), \text{ für alle } j \geq 1.$$

Angenommen es gilt $\mathrm{Ker}(f^j) = \mathrm{Ker}(f^{j+1})$ für ein $1 \leq j \leq n$. Analog zu b) folgt

$$\mathrm{Ker}(f^{j+k}) = \{\vec{v} \in V \mid f^{j+k}(\vec{v}) = \vec{0}\} = \{\vec{v} \in V \mid f^j(f^k(\vec{v})) = \vec{0}\}$$
$$= \{\vec{v} \in V \mid f^k(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}(f^j)\} = \{\vec{v} \in V \mid f^k(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}(f^{j+1})\}$$
$$= \{\vec{v} \in V \mid f^{j+1}(f^k(\vec{v})) = \vec{0}\} = \{\vec{v} \in V \mid f^{j+k+1}(\vec{v}) = \vec{0}\}$$
$$= \mathrm{Ker}(f^{j+k})$$

für alle $k \geq 0$ und damit

$$\mathrm{Ker}(f^j) = \mathrm{Ker}(f^{j+1}) = \dots = \mathrm{Ker}(f^{n+1}) = \dots = \mathrm{Ker}(f^i) = V \quad (\leq j \leq n+1 \leq i),$$

denn es gilt $\mathrm{Ker}(f^i) = V$, da $f^i : V \to V$ die Nullabbildung ist.

Aus $\mathrm{Ker}(f^{n+1}) = V$ folgt aber, dass auch $f^{n+1} : V \to V$ die Nullabbildung ist. Somit dürfen wir $\mathrm{Ker}(f^j) \neq \mathrm{Ker}(f^{j+1})$ für alle $1 \leq j \leq n$ annehmen, was nach (1) direkt

(2) $\dim(\mathrm{Ker}\, f^j) + 1 \leq \dim \mathrm{Ker}(f^{j+1})$ für alle $1 \leq j \leq n$

liefert.

Wegen $0 \in \operatorname{Ker} f$ bzw. $\dim \operatorname{Ker}(f^1) \geq 0$ folgt daraus induktiv $\dim \operatorname{Ker}(f^j) \geq j-1$ für alle $n+1 \geq j \geq 1$, also $\dim \operatorname{Ker}(f^{n+1}) \geq n$.

Da $\operatorname{Ker}(f^{n+1})$ als UVR von V höchstens Dimension n hat, muss $\dim \operatorname{Ker}(f^{n+1}) = n$ und folglich $\operatorname{Ker} f^{n+1} = V$ sein (beachte: $\dim V = n$).

Daraus folgt, dass $f^{n+1} : V \to V$ die Nullabbildung ist.